เฉลยชุดข้อสอบ : กลศาสตร์ของไหล ชุดที่ 2

ข้อที่ 1

ตอบ $1+\dfrac{d}{h}$

รูป ก) $F_{\mathrm{B}} = m_{\mathrm{B}}g$
ให้พื้นที่หน้าตัดของวัตถุ $\mathrm{B} = a$ ระยะวัตถุจม $= x$

$$D_{\text{น้ำ}}axg = m_{\mathrm{B}}g \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

รูป ข) ระยะวัตถุจม $= x + d$ ให้ $V =$ ปริมาตรของM
จะได้

$$(M + m_{\mathrm{B}})g = D_{\text{น้ำ}}Vg + D_{\text{น้ำ}}a(x+d)g \ldots\ldots (2)$$

รูป ค) ระยะวัตถุจม $= x + d + h$

$$(M + m_{\mathrm{B}})g = D_{\text{น้ำ}}a(x+d+h)g \ldots\ldots\ldots (3)$$

$(2) = (3);$

$$V = ah$$

$(3) - (1);$

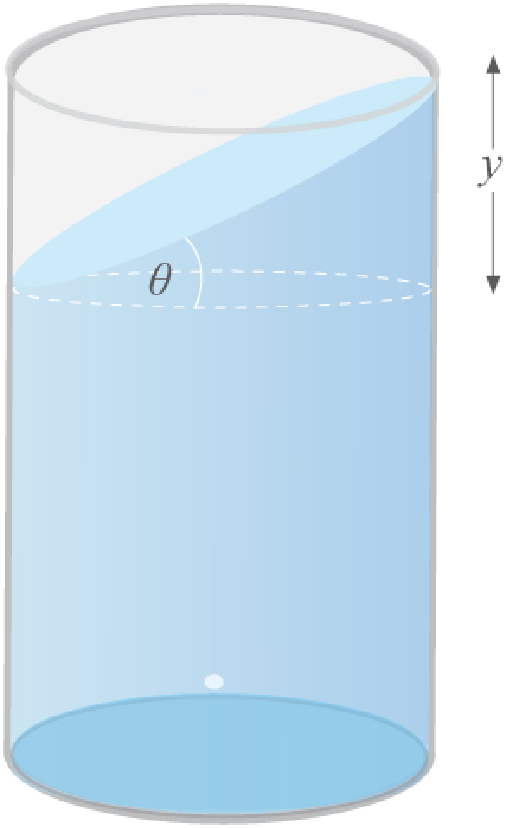
$$M = D_{\text{น้ำ}}ad + D_{\text{น้ำ}}ah$$
$$M = D_{\text{น้ำ}}a(d+h)$$

$$\frac{DM}{D_{\text{น้ำ}}} = \frac{M}{VD_{\text{น้ำ}}} = \frac{D_{\text{น้ำ}}a(d+h)}{ahD_{\text{น้ำ}}}$$

ความถ่วงจำเพาะของ $M = \dfrac{(h+d)}{h} = 1 + \dfrac{d}{h}$

ข้อที่ 2

ตอบ $\pi R^2(H - R\tan\theta)$



เมื่อเราเอียงคอตามถังน้ำจะเห็นดังรูป โดยที่ผิวน้ำจะทำมุม θ กับแนวระดับสายตา จะได้ว่าปริมาตรน้ำส่วนที่หายไปด้านบน มีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของ ปริมาตรน้ำในทรงกระบอกสูง y
ปริมาตรน้ำที่หายไป

$$\delta V = \frac{1}{2}\pi R^2(2R\tan\theta) = \pi R^3 \tan\theta$$

จะได้ว่ามีน้ำเหลืออยู่

$$\begin{aligned} V_0 - \delta V &= \pi R^2 H - \pi R^3 \tan\theta \\ &= \pi R^2 (H - R\tan\theta) \end{aligned}$$

ข้อที่ 3

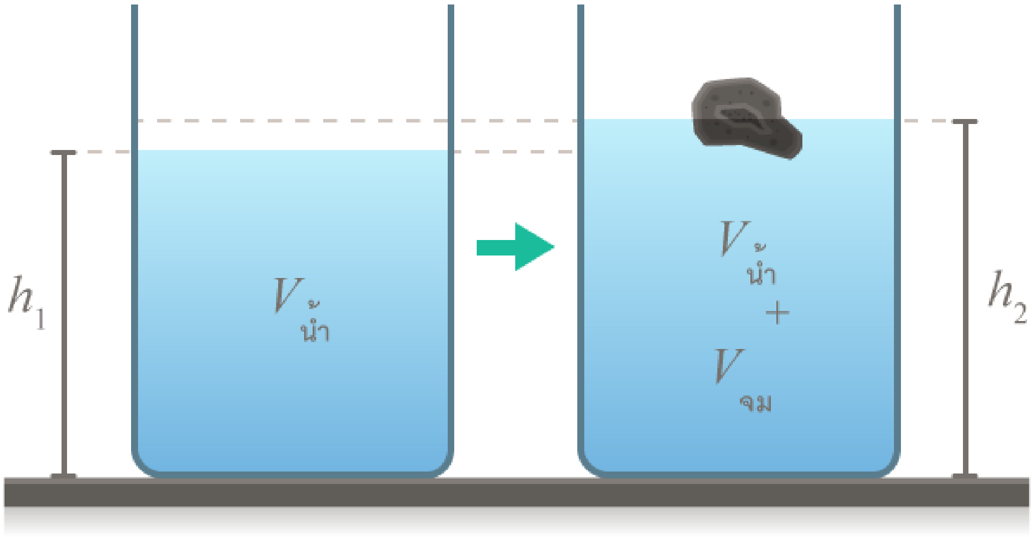
ความดันที่ก้นถังจะต้องสูงขึ้นเพื่อรับน้ำหนักมวล mg เนื่องจากน้ำหนัก mg กระจายไปบนพื้นที่ก้นถัง A

$$\therefore \Delta P = \frac{mg}{A}$$

ΔP ที่เพิ่ม แปลงระดับน้ำ $\rho g \Delta h$

$$\begin{aligned} \frac{mg}{A} &= \rho g \Delta h \\ \Delta h &= \frac{m}{\rho A} \end{aligned}$$

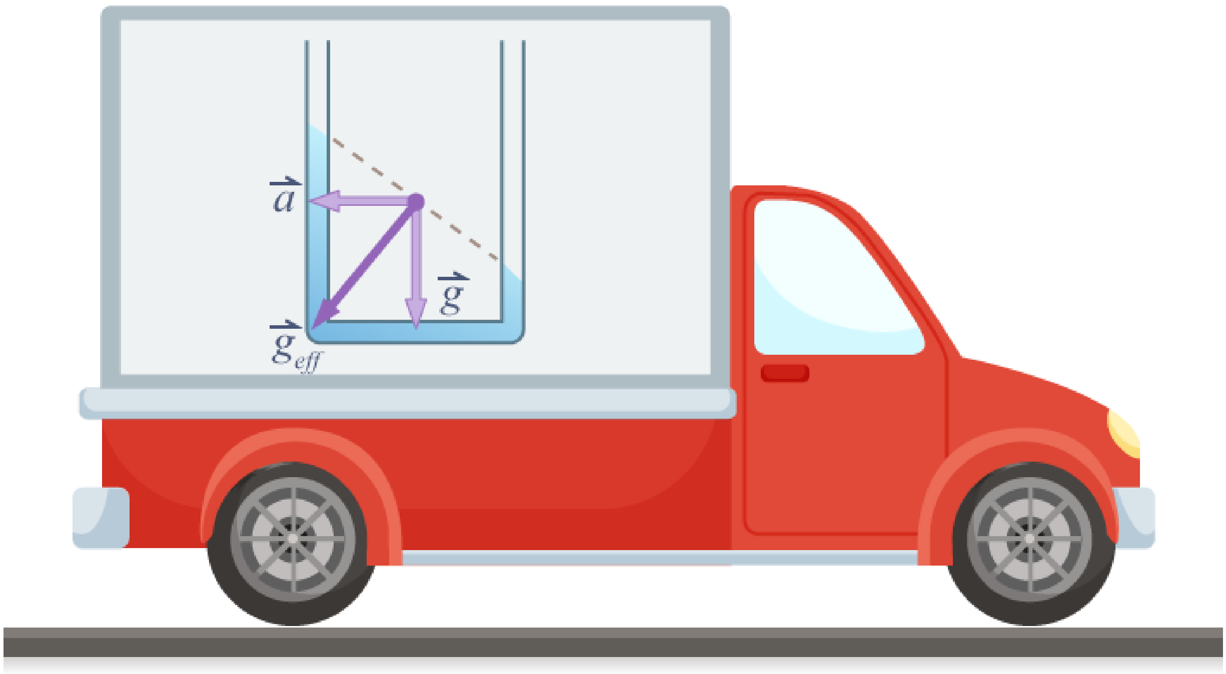
หรือใช้แรงลอยตัว



$$
\begin{aligned}
mg &= \rho V_{\text{จม}} g \\
V_{\text{จม}} &= \frac{m}{s} \\
h_1 &= \frac{V_{\text{น้ำ}}}{A} \\
h_2 &= \frac{V_{\text{น้ำ}} + V_{\text{จม}}}{A} \\
h_2 - h_1 &= \frac{V_{\text{น้ำ}} + V_{\text{จม}}}{A} - \frac{V_{\text{น้ำ}}}{A} \\
&= \frac{V_{\text{จม}}}{A} \\
&= \frac{m}{\rho A}
\end{aligned}
$$

ข้อที่ 4

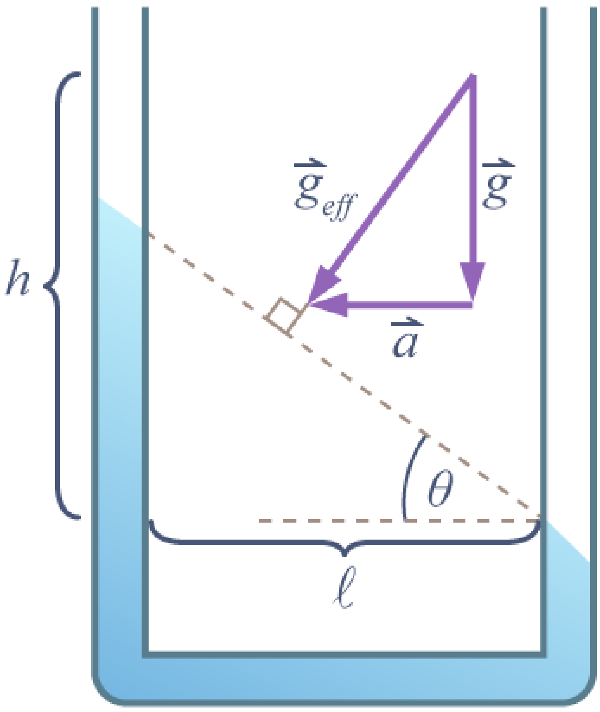
ตอบ $\frac{la}{g}$



กรณีนี้ วิธีที่ง่ายที่สุดคือการนำผู้สังเกตไปนั่งในกรอบอ้างอิงไม่เฉื่อย (ในรถ) จะเห็นแรงโน้มถ่วงเทียม $-\vec{a}$ ทำให้เกิด effective gravity : $\vec{g}_{\text{eff}}$

$$\vec{g}_{eff} = \vec{g} + (-\vec{a})$$

และผิวน้ำจะตั้งฉากกับ $\vec{g}_{eff}$ เสมอ



$$\tan\theta = \frac{a}{g}$$
$$= \frac{h}{l}$$
$$h = \frac{la}{g}$$

ข้อที่ 5

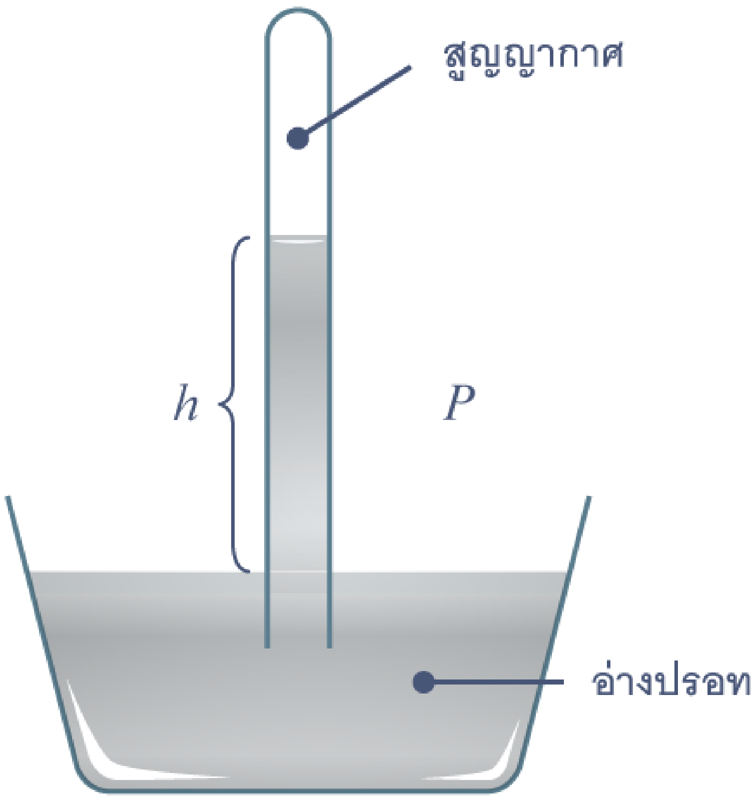
ตอบ $h_w = 1.632 \text{ m}$

โจทย์กำหนดว่า ใช้เครื่องมือวัดความดันที่บอกความดันด้วยความสูงของปรอท ปรากฏว่า ปรอทขึ้นไปสูง 120 mm จาก ข้อมูลนี้สามารถหาความดันเลือดได้จาก

$$P = (\rho_{Hg}) g h_{Hg}$$

เมื่อ
P เป็นความดันเลือด
ρ_{Hg} เป็นความหนาแน่นปรอท
g เป็นค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงโลกที่ผิวโลก
h_{Hg} เป็นความสูงของปรอท
ซึ่งถ้าเปลี่ยนปรอทเป็นน้ำ แล้วนำไปวัดความดันเลือด P ดังกล่าว ความสูงของน้ำ h_w จะเปลี่ยนไป ดังนั้น

$$\begin{aligned} P &= (\rho_{Hg}) g h_{Hg} = \rho_w g h_w \\ \therefore \quad (\rho_{Hg}) h_{Hg} &= \rho_w h_w \\ h_w &= \frac{\rho_{Hg} h_{Hg}}{\rho_w} \\ &= \frac{\left(13600 \text{ kg/m}^3\right)(120 \text{ mm})}{1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3} \\ &= 1.632 \text{ m} \end{aligned}$$



ข้อที่ 6

พิจารณาแรงที่น้ำกระทำต่อลูกบอล

$$F\mathrm{d}t = \rho A v \mathrm{d}y$$

$$F = \rho A v^2$$

ซึ่งตอนแรก ลูกบอลลอยู่ในสมดุล

$$F = mg$$

$$v^2 = \frac{mg}{\rho A}$$

จากสมการการเคลื่อนที่

$$\begin{aligned} v^2 &= u^2 - 2gh \\ u^2 &= v^2 + 2gh \\ u_1^2 &= \frac{mg}{\rho A} + 2gh \\ u_2^2 &= \frac{mg}{\rho A} + 4gh \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{u_1}{u_2} = \sqrt{\frac{m + 2\rho A h}{m + 4\rho A h}}$$

โจทย์บอกว่าน้ำตกกระทบตั้งฉากกับผิวลูกบอล
จึงไม่ควรมีน้ำไปชนผิวทรงกลมด้านข้าง คือ มันจะเบนอออกในแนวระดับหมดเลย ดูจากรูป
โจทย์ยังบอกอีกด้วยว่าเป็นลูกบอลขนาดใหญ่
วิธีทำ
อัตราเร็วที่น้ำกระทบลูกบอลที่ความสูง y ใดๆหาได้จาก $v = \sqrt{u^2 - 2gh}$ และจากสมการความต่อเนื่องได้ว่า
พื้นที่ของน้ำตอนกระทบ มีค่า

$$A_1 = \frac{A_u}{\sqrt{u^2 - 2gy}}$$

เราพิจารณาว่าในช่วงเวลา δt ลำน้ำเสียโมเมนตัมไป $\rho A_1 v^2 \delta t$ นี่บ่งว่าในช่วงเวลาสั้นๆนี้
บอลลออกแรง $\rho A_1 v^2$ ทิศลง กับล้ำน้ำส่วนที่ชน
จากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อ 3 เราได้ว่าน้ำออกแรง $\rho A_1 v^2$ ทำกับบอลด้วย ทิศขึ้น
ดังนั้นเมื่อบอลสมดุลเราจะได้ว่า

$$mg = \rho A_1 v^2$$

แทนค่าความเร็วและพื้นที่หน้าตัดตอนกระทบลงไป เราได้ว่า

$$mg = \rho A u \sqrt{u^2 - 2gy}$$

แก้สมการออกมาได้ว่าความเร็วต้นที่ทำให้บอลไปสมดุลที่ความสูง y ใดๆ มีค่าเท่ากับ

$$u(y) = \left[gy + \sqrt{g^2 y^2 + (\frac{mg}{\rho A})^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

แทน$y = h$ ได้ว่า

$$u(h) = \left[gh + \sqrt{g^2h^2 + (\frac{mg}{\rho A})^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

แทน$y = 2h$ได้ว่า

$$u(2h) = \left[g2h + \sqrt{g^2(2h)^2 + (\frac{mg}{\rho A})^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

หาอัตราส่วนระหว่างทั้งสองได้ว่า ต้องเพิ่มความเร็วต้นน้ำให้เป็น

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{4+\frac{m}{\rho Ah}^2}}{1+\sqrt{1+\frac{m}{\rho Ah}^2}}}\text{เท่าจากเดิม}$$

ลูกบอลจึงจะเลื่อนสูงจากปากท่อเป็น $2h$

ลองคิดที่เวลา Δt เล็กๆ
มวลที่พุ่งชนเป็น $\rho Av\Delta t$ เมื่อ $v = \sqrt{u^2 - 2gh}$ เป็นความเร็ว ณ จุดที่ชน
ดังนั้น โมเมนตัมที่เปลี่ยนไปเป็น $\rho Av^2\Delta t$
แรงที่กระทำคือโมเมนตัมที่เปลี่ยนไปต่อหน่วยเวลา $f = \rho Av^2 = \rho A(u^2 - 2gh)$ (ทิศขึ้น)
กฎนิวตัน

$$\rho A(u^2 - 2gh) - mg = 0$$

$$u^2 = \frac{mg}{\rho A} + 2gh$$

ข้อที่ 7

หลอดตัวยูวัดผลต่างความดันที่บริเวณท่อใหญ่กับท่อเล็กว่ามีค่าเท่ากับ $\rho_2 gh$ ความดันที่ต่างกันนี้เกิดจากอัตราเร็วของเหลวในท่อที่ไหลเร็วไม่เท่า กัน จาก $A_1v_1 = A_2v_2$ อัตราเร็วในท่อเล็กจะเป็น 2 เท่าของในท่อใหญ่ $v_2 = 2v_1$ เพราะว่าพื้นที่ตัดขวางเป็น 2 เท่าของท่อเล็ก $\left(A_2 = 2A_1\right)$ จากกฎของแบร์นูลลี

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2$$

เราหาได้ว่า ผลต่างความดันคือ

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho_1 {v_2}^2 - \frac{1}{2}\rho_1 {v_1}^2 = \frac{1}{2}\rho_1\left({v_2}^2 - {v_1}^2\right) = \frac{1}{2}\rho_1\left(4{v_1}^2 - {v_1}^2\right) = \frac{3}{2}\rho_1 {v_1}^2$$

โดยที่เราประมาณว่าสายกระแสที่ผ่านท่อใหญ่และท่อเล็กอยู่ในระดับเดียวกันเมื่อเทียบผลต่างความดันที่หาได้จากสองวิธี เราจะได้ว่า

$$\rho_2 gh = \frac{3}{2}\rho_1 v_1^2 \Rightarrow h = \frac{3}{2}\frac{\rho_1 v_1^2}{\rho_2 g}$$

ข้อที่ 8

เฮลิคอปเตอร์เป่าอากาศลงมาทำให้อากาศมีพลังงานจลน์เปลี่ยนไป
พลังงานที่เฮลิคอปเตอร์ให้ต่ออากาศต่อหนึ่งหน่วยเวลาคือกำลังที่ต้องการ
เฮลิคอปเตอร์ต้องออกแรงเป่าอากาศลงมาเพื่อให้อากาศออกแรงกระทำต่อ เฮลิคอปเตอร์เท่ากับน้ำหนักเฮลิคอปเตอร์
เฮลิคอปเตอร์ทำให้อากาศซึ่งเดิมอยู่นิ่งมีโมเมนตัมเปลี่ยนไป โมเมนตัมของอากาศที่เปลี่ยนไปในหนึ่งหน่วยเวลามีค่าท่ากับแรงสุทธิที่กระทำ ต่ออากาศ
เราจะสมมติว่าในช่วงเวลา Δt สั้น ๆ ความเร็วของอากาศใต้ปีกเปลี่ยนจากศูนย์ไปเป็น v เท่ากันหมด
ในช่วงเวลานี้อากาศใต้ปีกเฮลิคอปเตอร์ถูกเป่าลงมาเป็นระยะทาง $v\Delta t$ และดังนั้นปริมาตรของอากาศที่ถูกเป่าลงมาคือ $v\Delta t\pi r^2$ อากาศปริมาตรนี้มีมวล $\rho v\Delta t\pi r^2$
เพราะฉะนั้นในช่วงเวลา Δt โมเมนตัมของอากาศเปลี่ยนไป $\rho v^2\Delta t\pi r^2$
แรงที่เฮลิคอปเตอร์กระทำต่ออากาศจึงมีขนาดเท่ากับ $\rho v^2\Delta t\pi r^2/\Delta t$ แรงนี้มีขนาดเท่ากับแรงที่อากาศกระทำต่อเฮลิคอปเตอร์และต้องมีขนาดเท่า กับน้ำหนักของเฮลิคอปเตอร์

$$\rho v^2\pi r^2 = mg$$

ดังนั้นเฮลิคอปเตอร์ต้องเป่าลมลงมาด้วยอัตราเร็ว $v = \sqrt{\dfrac{mg}{\rho\pi r^2}}$

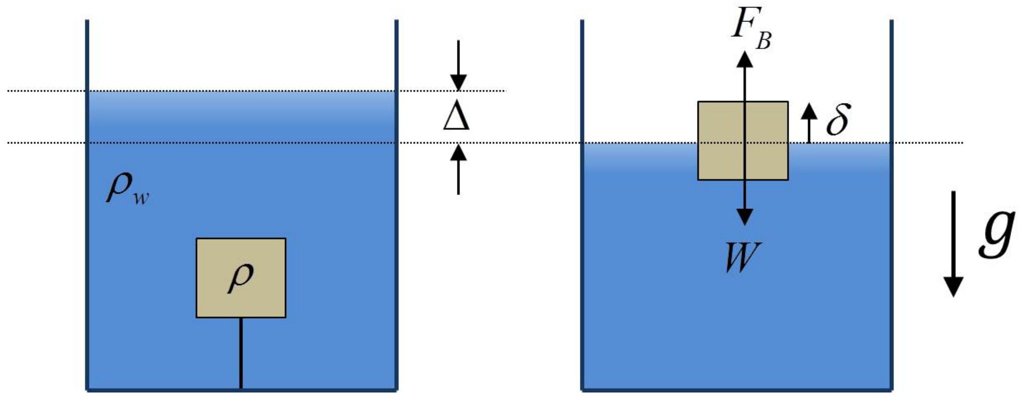
พลังงานจลน์มีมวลอากาศได้รับต่อหนึ่งหน่วยเวลามีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\rho v\Delta t\pi r^2}{\Delta t}v^2 = \frac{1}{2}\rho v^2\pi r^2\left(\frac{mg}{\rho\pi r^2}\right)^{3/2} &= \frac{1}{2}mg\left(\frac{mg}{\rho\pi r^2}\right)^{1/2}\\ &= \frac{1}{2}\times 500\times 9.8\left(\frac{500\times 9.8}{1.29\times\pi\times(2.5)^2}\right)^{1/2}\ \mathrm{J/s}\\ &= 34\times 10^3\ \mathrm{W}\end{aligned}$$

ดังนั้น กำลังที่เฮลิคอปเตอร์ต้องใช้คือ $34\times 10^3\ \mathrm{W}$

ข้อที่ 9

ตอบ $\left(\dfrac{d^3}{A-d^2}\right)(1-\dfrac{\rho}{\rho_w})$



สมมุติว่าหลังจากเชือกขาดไปแล้ว วัตถุลอยอยู่เหนือน้ำ δ และระดับน้ำลดลงมา Δ ดังรูป (น้ำลดลงเพราะเนื้อวัตถุที่แทนที่น้ำได้ลอยขึ้น แล้วน้ำก็ไหลเข้ามาแทนที่บริเวณนั้น ๆ จึงทำให้ความสูงของน้ำลดลง) เนื่องจากวัตถุลอยอยู่นิ่ง ๆ ดังนั้น แรงลอยตัว (F_b)สมดุลกับน้ำหนัก(mg) ดังนั้น

$$\begin{aligned}F_b &= mg\\ \rho_w d^2(d-\delta)g &= \rho d^3 g\\ \delta &= d\left(1-\frac{\rho}{\rho_w}\right)\end{aligned}$$

ปริมาตรของวัตถุส่วนที่ลอยนี้จะต้องเท่ากับปริมาตรของน้ำที่ไหลเข้ามาแทนที่ซึ่งทำให้ระดับน้ำลดลง Δ ดังนั้น

$$d^2\delta = \Delta(A - d^2)$$

ดังนั้น น้ำจะลดระดับลงไป

$$\Delta = \left(\frac{d^3}{A - d^2}\right)(1 - \frac{\rho}{\rho_w})$$